TRAZADO DE CURVAS A BASE DE LÍNEAS RECTAS

Μικρὸν δῶρον τῇ ἑλληνικῇ μαθηματικῇ

Talleres de Cultura Clásica de Sagunto
Abril de 2008

Antonio Ledesma López
IES *Uno* de Requena

Y los antiguos alumnos de **Estructuras Espaciales**:
Kevin Sáiz Medrano
Noelia Villar Ferrer

LAS CÓNICAS COMO SECCIONES PLANAS DE UNA SUPERFICIE CÓNICA

Cuentan los historiadores que el astrónomo y geómetra **Menecmo** (s. IV a.C.), maestro de Alejandro Magno, descubrió las secciones cónicas al intentar resolver uno de los tres problemas clásicos, el de la duplicación del cubo o, también llamado, del *oráculo de Delos*. Obtuvo las secciones cónicas cortando perpendicularmente la generatriz de un cono circular recto: Si el ángulo del vértice del cono era agudo surgía una elipse; si era recto, una parábola, y si era obtuso, una hipérbola.

Más tarde la cultura griega se extiende por el Mediterráneo, y Alejandría se convierte en centro del saber. Es allí donde **Euclides**, uno de los matemáticos más grandes de la antigüedad, funda la Escuela de Matemáticas de Alejandría y escribe un tratado sobre las cónicas, compuesto de cuatro libros, que por desgracia no ha llegado hasta nosotros.

Poco después, aún en el s. III a.C., estudia en esta misma ciudad el legendario y genial **Arquímedes de Siracusa** en cuyos tratados vemos lo amplio, diverso, profundo y, a la vez, útil de su sabiduría. En ellos nos expone sus conocimientos sobre geometría plana y espacial, aritmética, mecánica, hidrostática y astronomía. Varios tratan las cónicas: *Sobre la medida del círculo*, *Sobre la cuadratura de la parábola*, donde halla el área del segmento parabólico; *Sobre la esfera y el cilindro*, donde relaciona sus volúmenes; *Sobre los conoides y los esferoides*, donde calcula el área de la elipse y el volumen del paraboloide de revolución, y *El Método*.

También llegará a Alejandría, veinticinco años más joven que Arquímedes, **Apolonio de Perga**. Astrónomo y estudioso de una gran variedad de temas matemáticos, es ante todo **"el gran geómetra"**, conocido por sus *Secciones Cónicas*, trabajo compuesto de ocho libros, formados por 400 proposiciones, en los que se acerca más a los métodos de geometría analítica actuales que a los puramente geométricos.

Mientras en los cuatro primeros libros se limita a hacer un compendio de la teoría de las cónicas elaborada por sus precursores incluyendo algunas generalizaciones propias, es en los cuatro últimos donde realmente aporta a la geometría sus auténticos descubrimientos: Apolonio demuestra que no es necesario cortar perpendicularmente la generatriz de un cono. Basta con variar la inclinación de los planos que lo cortan. Además, obtiene resultados generales sobre las cónicas utilizando, no sólo el cono circular recto, sino el cono oblicuo o el cono circular escaleno, y demuestra así que las propiedades de las cónicas son las mismas tanto si proceden de conos oblicuos como de conos rectos. A él debemos también la superposición de dos conos unidos en su vértice y con ejes coincidentes.

Todo esto lo conocemos gracias a la *Colección Matemática* de **Pappus de Alejandría**, matemático e historiador que vivió en las postrimerías del siglo III y principios del IV, y cuya obra, considerada como el «*requiem de la matemática griega*», recopila y comenta todas las matemáticas griegas e incluye nuevos conocimientos y generalizaciones que no existían en trabajos anteriores.

La teoría de cónicas de Apolonio resultó compleja, amplia y tan elaborada que, sin un instrumento como el álgebra, inexistente en la época del *gran geómetra* —de ahí su mérito—, deberemos esperar hasta el siglo XVII para poder encontrar un estudio más profundo del tema.

Mientras tanto, los árabes traducen y difunden numerosos textos griegos e indios. El álgebra y el desarrollo de las trigonometrías plana y esférica fueron sus mayores contribuciones a las matemáticas. En relación con las cónicas sólo aparecen propiedades y problemas puntuales del círculo y de la esfera en tratados de **Avicena** y **Alhacen**, entre otros, que versan sobre astronomía, óptica o ciencias.

Por otro, lado **Gerardo de Cremona** (1114-1187), prolífico traductor que residió en España, transcribe al latín la obra de Apolonio.

Posteriormente, con el auge de las primeras universidades europeas, la invención de la imprenta y la llegada del Humanismo nos situamos en el Renacimiento:

- **J. Werner** en su *Elementos de las cónicas*, impresa en Nuremberg, concentra su estudio en la parábola y la hipérbola.
- **Kepler** enuncia en su *Astronomía nova* las dos primeras leyes del movimiento planetario: 1ª.- Todos los planetas recorren órbitas elípticas teniendo al sol en uno de sus focos. 2ª.- El segmento que une el sol con el planeta recorre áreas iguales en tiempos iguales.
- **Galileo** estudió la mecánica de la caída de los cuerpos y la dinámica, y fue el primero en darse cuenta de la naturaleza parabólica de la trayectoria de un proyectil en el vacío.

En el siglo XVII **Désargues** abre el camino a la geometría proyectiva. En su *Borrador*, posible esbozo de una obra mayor, estudia las propiedades comunes a las tres cónicas (parábola, elipse e hipérbola) y a la circunferencia, buscando siempre en las propiedades de ésta las que se conservan por perspectiva. La técnica utilizada es la proyección a partir de una circunferencia y el concepto clave de su obra es el de «*involución*».

Sólo **Pascal** sabría aprovechar el trabajo de Désargues, y así, en *Ensayo sobre las cónicas* formula su famoso teorema: En el hexágono de las cuerdas de una sección cónica los puntos de intersección de cada dos lados opuestos están alineados.

En el Siglo de las Luces comienzan a publicarse manuales prácticos donde aparecen estos conocimientos aplicados a la navegación, la ingeniería militar y civil, la geografía, la arquitectura ...

También en el XVIII, **Euler** clasifica las cónicas a partir del estudio de la ecuación de segundo grado con dos variables.

Ya en los albores del XIX, **Brianchon** demuestra por polaridad su famoso teorema: Si hay seis tangentes a una cónica que forma así un hexágono circunscrito, las tres rectas que unen vértices opuestos pasan por un único punto. Y finalmente, **Poncelet** en *Tratado de las propiedades proyectivas de las figuras* sistematiza la geometría proyectiva.

■

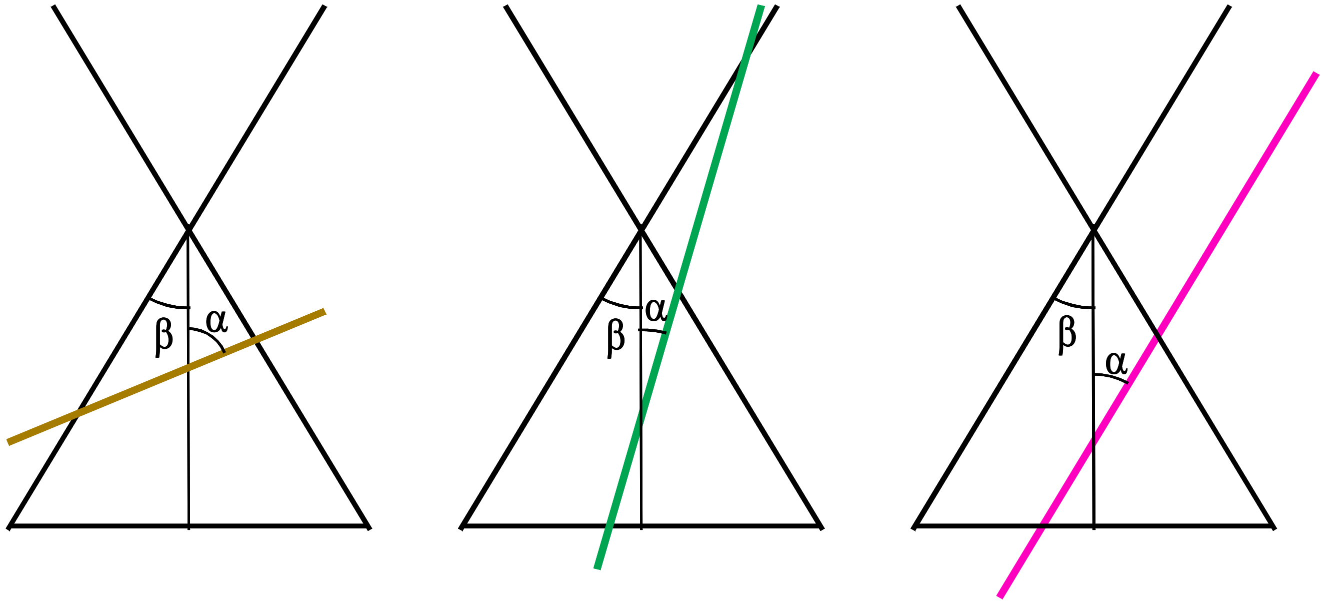
Nota sobre EL *ORÁCULO DE DELOS.*

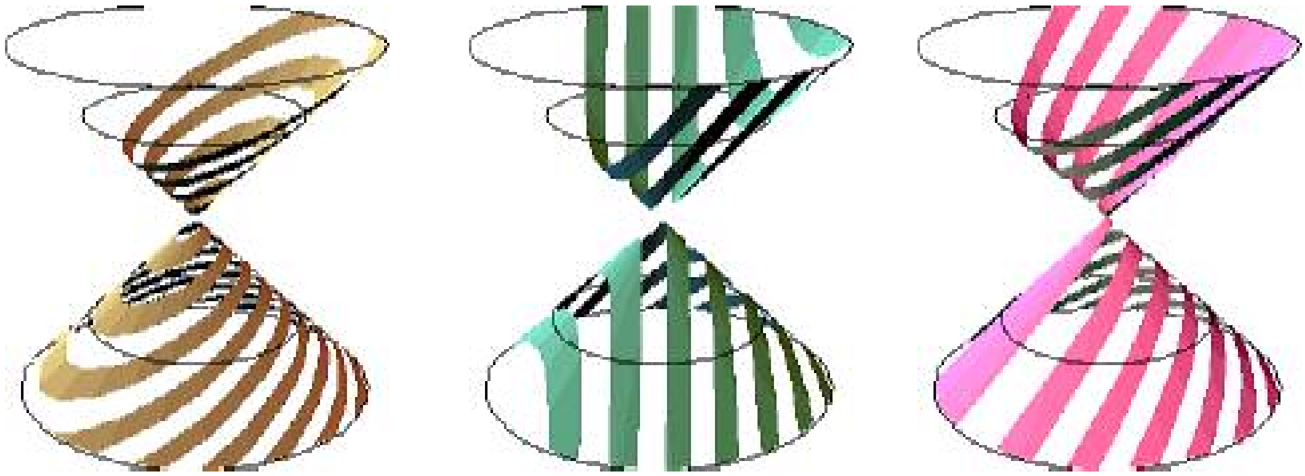
- Según una leyenda, hacia el año 428 a.C, la peste atemorizó a los atenienses y los dirigentes enviaron esbirros a consultar al oráculo de Delos qué podían hacer para acabar con la epidemia. El oráculo les dijo que para terminar con la peste tendrían que construir un altar de volumen doble que el que tenía Apolo en el templo. La peste no cedió, pero los supervivientes trataron de construir un altar con un volumen doble del que tenía Apolo.

- Eurípides en una de sus obras escenificó el ***problema de la duplicación del cubo***: el rey Minos, mandó construir una tumba para su hijo Glauco y, una vez terminado, manifestó que un mausoleo cúbico de sólo cien pies por lado era un espacio muy reducido e indigno para el sepulcro de un rey, y ordenó al arquitecto que lo duplicaran conservando su forma de cubo. El arquitecto duplicó los lados y… la planta se cuadriplicó y el volumen se hizo ocho veces mayor. Y el mítico Minos se vio obligado a encargar a los imaginativos geómetras que estudiaran la forma de duplicar el volumen de altar manteniendo la forma. Esta es la historia del origen del ***problema de la duplicación del cubo***

SECCIONES DE UN CONO RECTO

Llamemos α al ángulo que forma el plano secante con el eje del cono, y β al semiángulo en el vértice.





$\beta < \alpha < 90^\circ$

ELIPSE

$\alpha < \beta < 90^\circ$

HIPÉRBOLA

$\alpha = \beta$

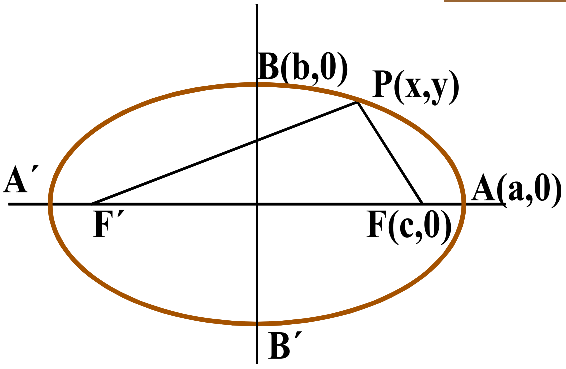
PARÁBOLA

Si $\alpha = 90^\circ$ CIRCUNFERENCIA

PROPIEDAD FOCAL DE LAS CÓNICAS

- **Elipse** $\mathcal{E}$ — $d(P, F) + d(P, F') = cte \quad \forall P \in \mathcal{E}$

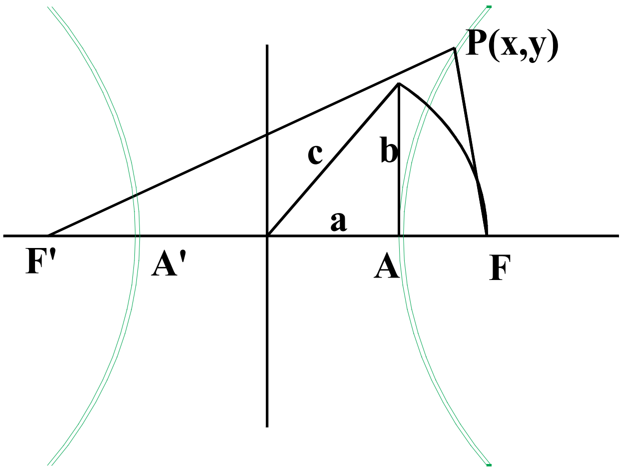
La suma de las distancias de un punto cualquiera de la elipse a los focos es siempre la misma



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \text{con} \quad a^2=b^2+c^2$$

- **Hipérbola** $\mathcal{H}$ — $d(P, F') - d(P, F) = cte \quad \forall P \in \mathcal{H}$

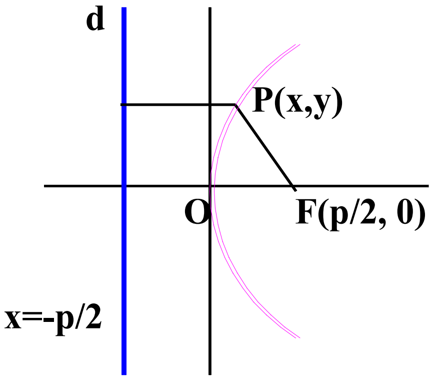
la diferencia de las distancias de cualquier punto de la hipérbola a los focos es siempre la misma



$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \text{con} \quad c^2=a^2+b^2$$

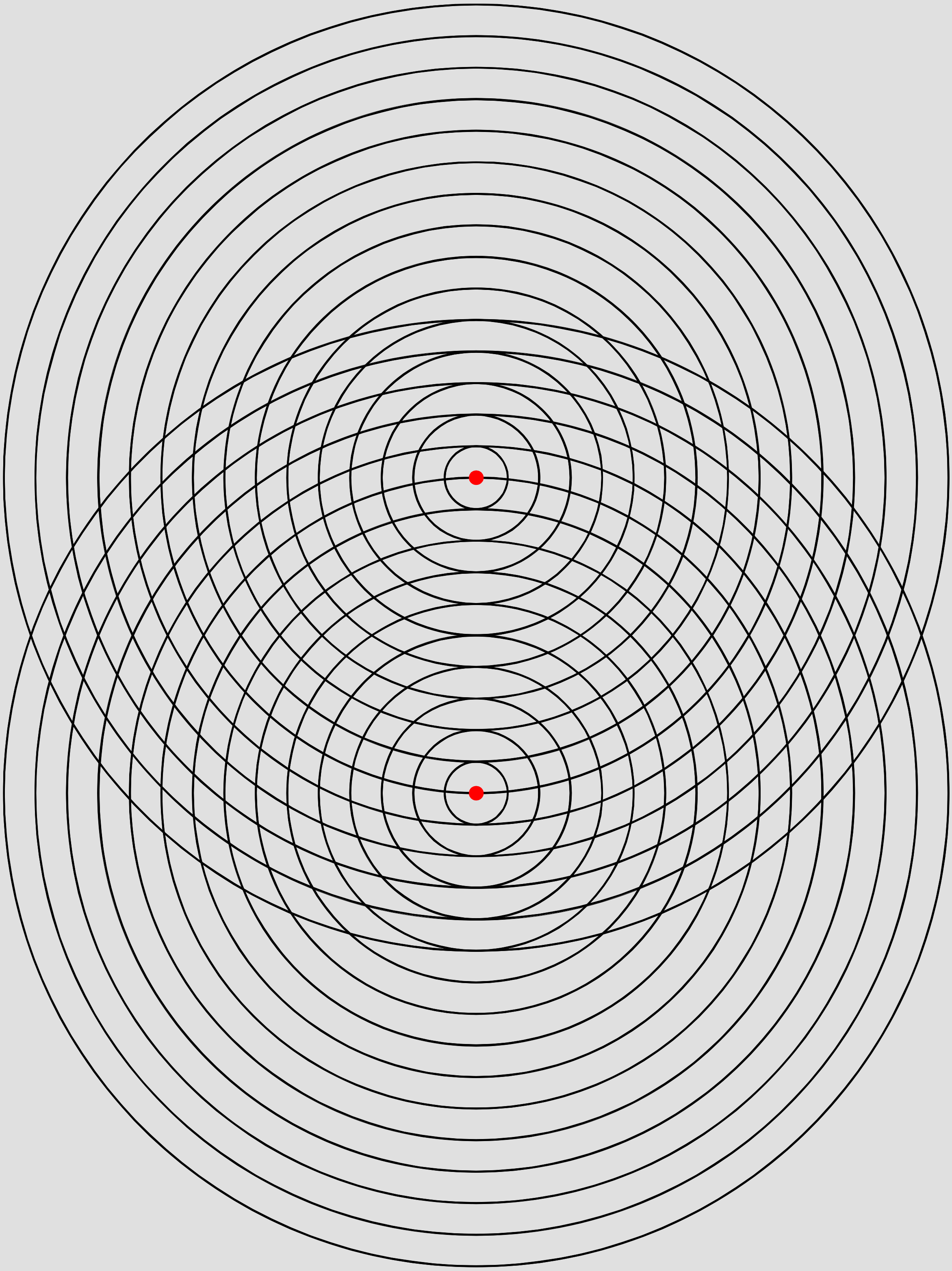
- **Parábola** $\mathcal{P}$ — $d(P, F) = d(P, d) \quad \forall P \in \mathcal{P}$

la distancia de un punto de la parábola al foco es igual que la distancia del mismo punto a la directriz

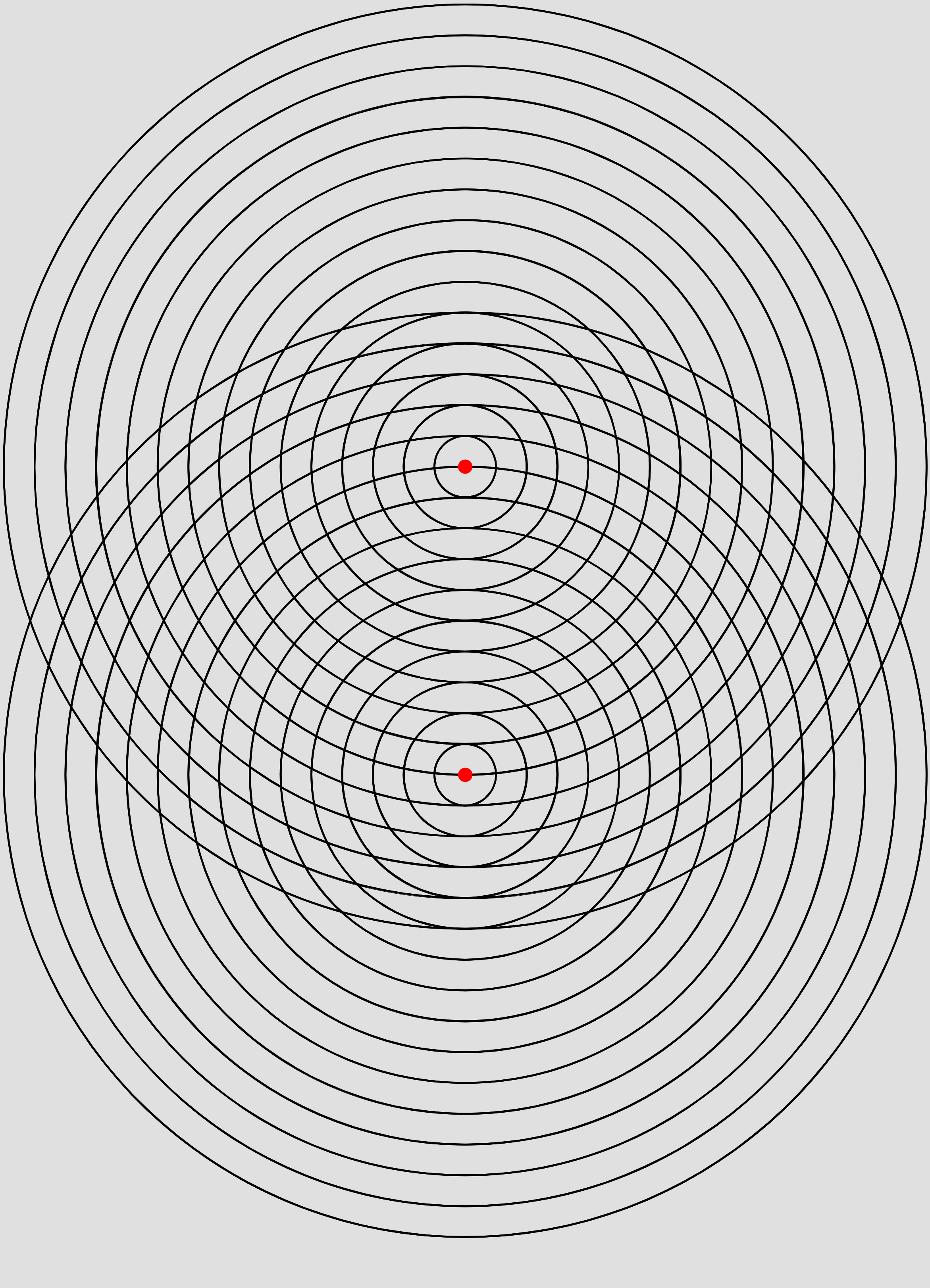


$$y^2=2px$$

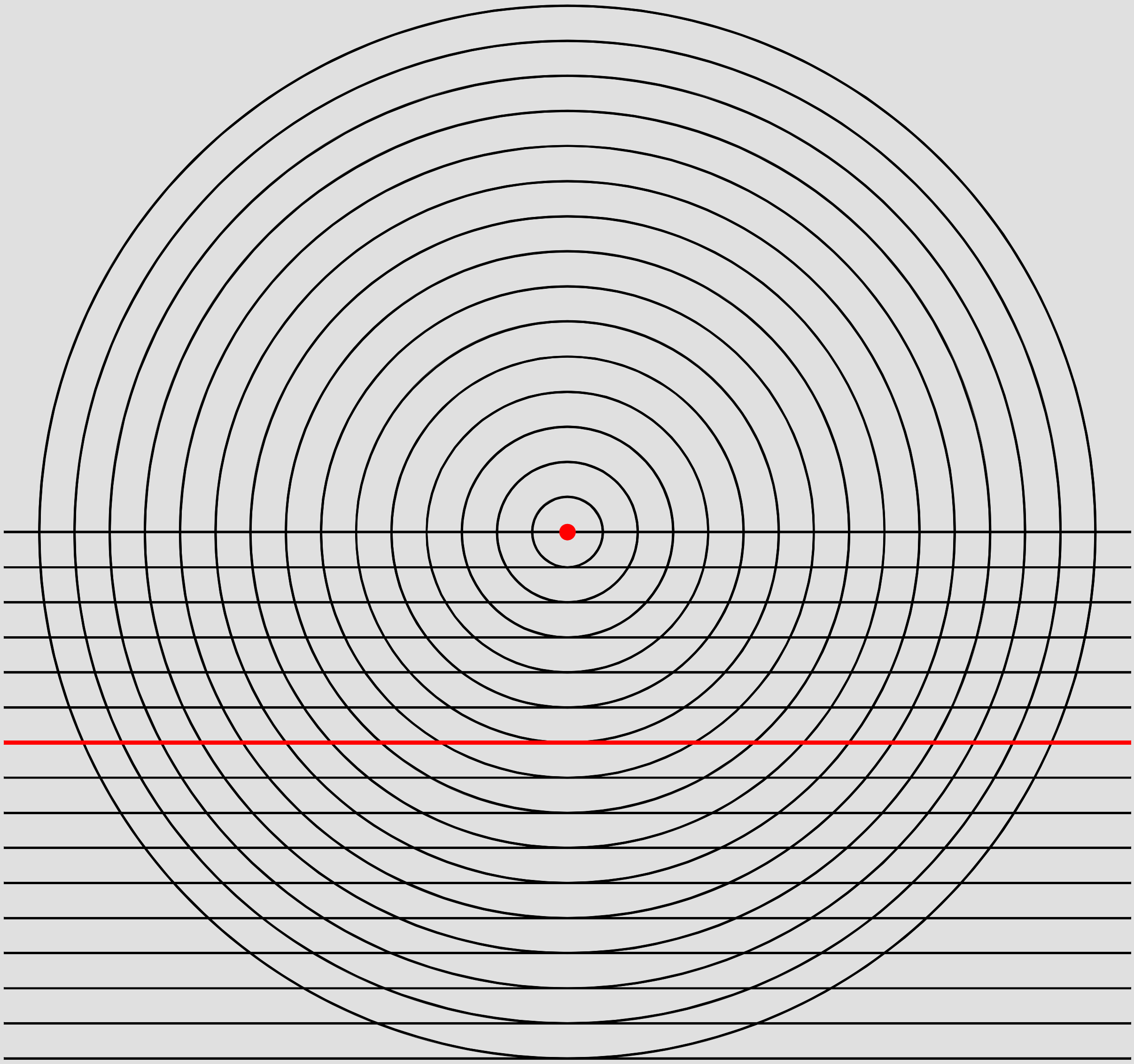
LA ELIPSE *(propiedad focal)*



LA HIPÉRBOLA *(propiedad focal)*

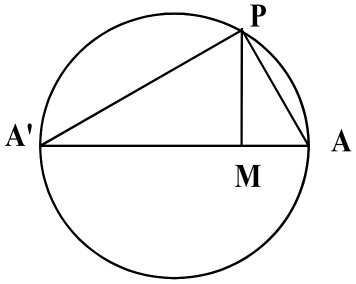


LA PARÁBOLA *(propiedad focal)*



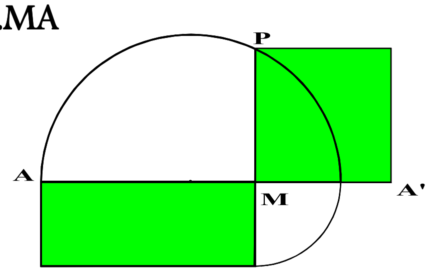
ORIGEN DEL NOMBRE: *El Latus Rectum*

- Desde la antigüedad se sabía que todo triángulo inscrito en una semicircunferencia era rectángulo y que en él se daba la siguiente relación (*Teorema de la altura*).



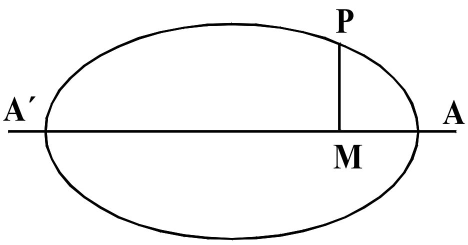
$\angle P = 90^o$

$PM^2 = A'M.MA$

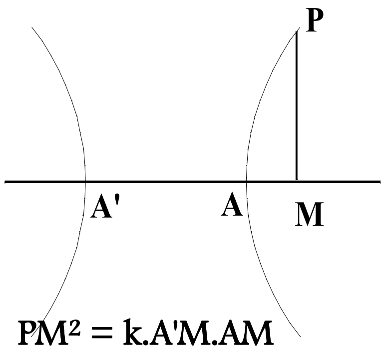


O lo que es lo mismo, el cuadrado de lado **PM** y el rectángulo de lados **A'M** y **AM** tienen el mismo área.

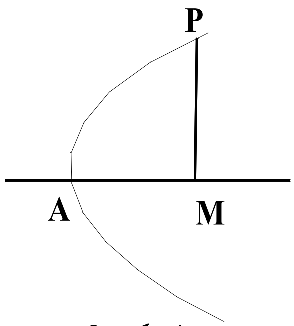
Apolonio intuyó que algo similar ocurría con las cónicas, y demostró que existía una constante positiva tal que



$PM^2 = k.A'M.MA$
$k > 0$

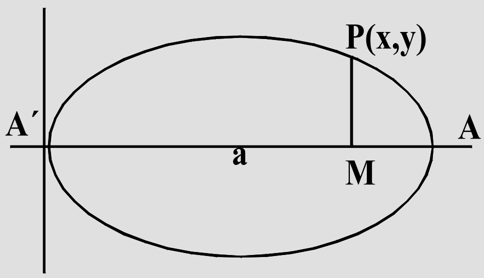


$PM^2 = k.A'M.AM$
$k > 0$



$PM^2 = k.AM$
$k > 0$

Veámoslo

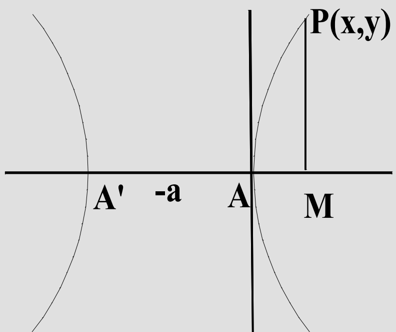


$$\frac{(x-a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

y despejando:

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}\left(2ax - x^2\right)$$

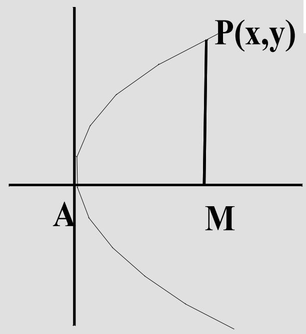
Llamando $k = \dfrac{b^2}{a^2} > 0$



$$\frac{(x+a)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}\left(2ax + x^2\right)$$

Llamando $k = \dfrac{b^2}{a^2} > 0$



$$y^2 = 2px$$

Hacemos
$k = 2p > 0$

queda probado

$$y^2 = kx(2a - x) = k.A'M.MA$$

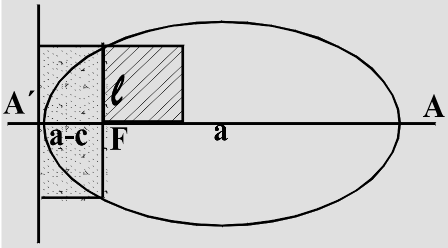
$$y^2 = kx(2a + x) = k.AM.A'M$$

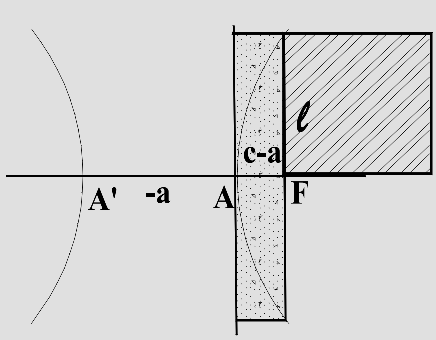
$$y^2 = kx = k.AM$$

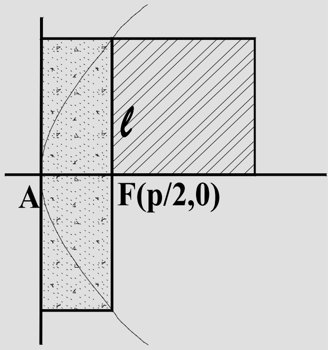
- Se denomina ***latus rectum*** (2ℓ) al coeficiente de la **x** en estas expresiones.

$$2\ell = 2ak = 2\frac{b^2}{a} \qquad 2\ell = 2ak = 2\frac{b^2}{a} \qquad 2\ell = k = 2p$$

Veamos su significado geométrico.







Tomemos la abcisa de un foco:

$$x = a - c$$

$$y^2 = k(a-c)(a+c) = \frac{b^4}{a^2}$$

Luego $y = \frac{b^2}{a} = \ell$

$$x = c - a$$

$$y^2 = k(c-a)(c+a) = \frac{b^4}{a^2}$$

También en este caso $y = \frac{b^2}{a} = \ell$

$$x = p/2$$

$$y^2 = k\frac{p}{2} = p^2$$

Y aquí $y = p = \ell$

En todos los casos <u>la ordenada en el foco es medio ***latus rectum***</u>.

- E interpretando las expresiones obtenidas

$$y^2 = 2akx - kx^2 = 2.\ell x - k x^2 \qquad y^2 = 2akx + kx^2 = 2.\ell x + k x^2 \qquad y^2 = kx$$

sabremos por qué Apolonio eligió estos nombres para las cónicas:

ELIPSE es una palabra que proviene del griego y significa ***insuficiencia***. Así, vemos en la figura anterior como el área del rectángulo de dimensiones *latus rectum* por abcisa del foco es *insuficiente* para completar el cuadrado de lado la ordenada en el foco.

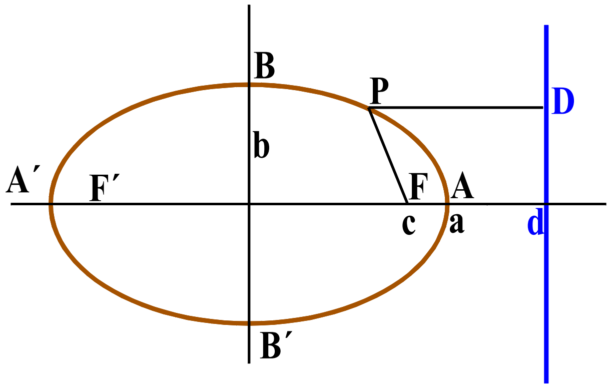
Análogamente, **HIPÉRBOLA** significa ***exceso***: el área del tal rectángulo *excede* a la de dicho cuadrado

Y **PARÁBOLA** significa ***comparación***: el área del rectángulo y del cuadrado son *equiparables*.

PROPIEDAD FOCO – DIRECTRIZ DE LAS CÓNICAS

- **Elipse $\mathcal{E}$** $\quad d(P, F) = e \cdot d(P, d) \quad \forall\, P \in \mathcal{E}$ con $e < 1$

La distancia de un punto de la elipse al foco es menor que la distancia de dicho punto a la recta directriz



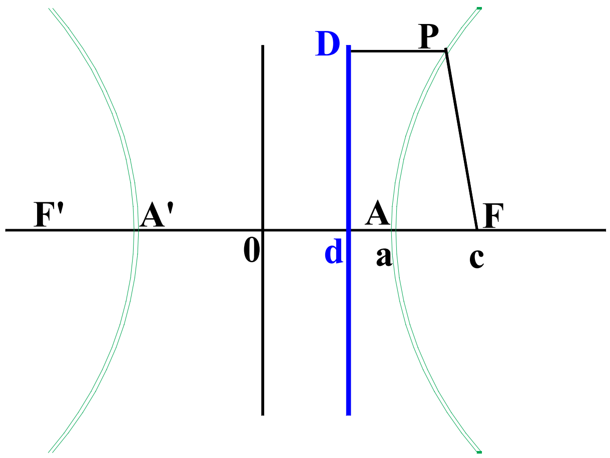
A la constante positiva **e** se le denomina **excentricidad** de la elipse y su valor es:

$$e = \frac{c}{a}$$

e oscila entre 0, para la circunferencia (la elipse menos excéntrica) y 1, el segmento **A'A** (la elipse más excéntrica de todas)

- **Hipérbola $\mathcal{H}$** $\quad d(P, F) = e \cdot d(P, d) \quad \forall\, P \in \mathcal{H}$ con $e > 1$

La distancia de un punto cualquiera de la hipérbola al foco es mayor que la distancia de dicho punto a la recta directriz



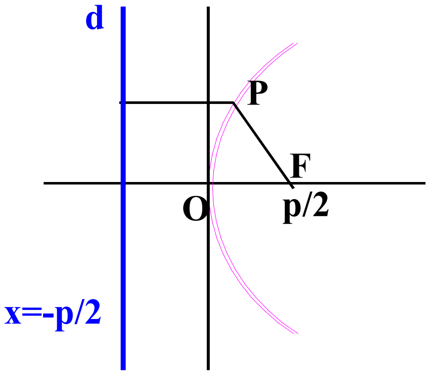
A la constante **e** mayor que **1** se le llama **excentricidad** de la hipérbola y su valor es:

$$e = \frac{c}{a}$$

El caso extremo $e = 1$ da una hipérbola cuyas ramas son dos rectas paralelas, las mismas directrices.

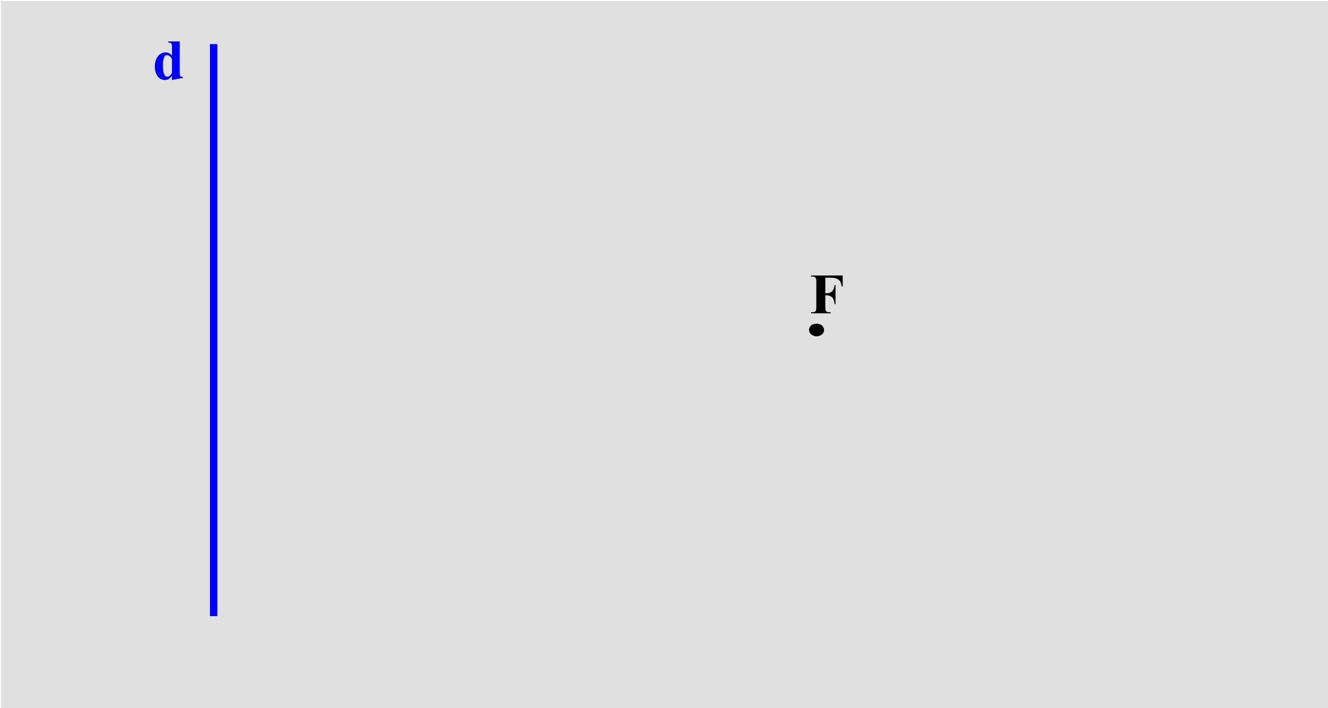
- **Parábola $\mathcal{P}$** $\quad d(P, F) = d(P, d) \quad \forall\, P \in \mathcal{P}$

La distancia de un punto cualquiera de la parábola al foco es igual que la distancia de dicho punto a la recta directriz



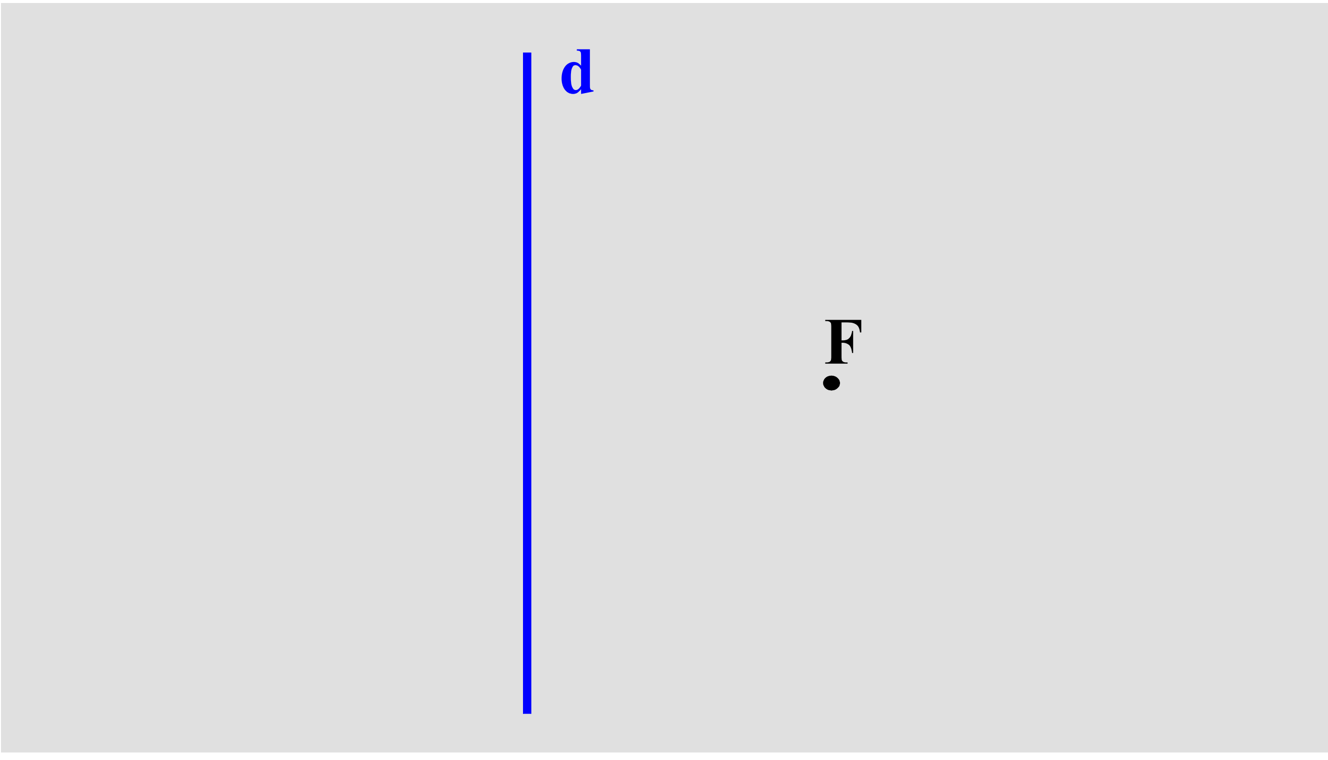
LA ELIPSE *(propiedad foco-directriz)*

Traza los puntos del plano que distan de la recta **d** el doble que del punto **F**



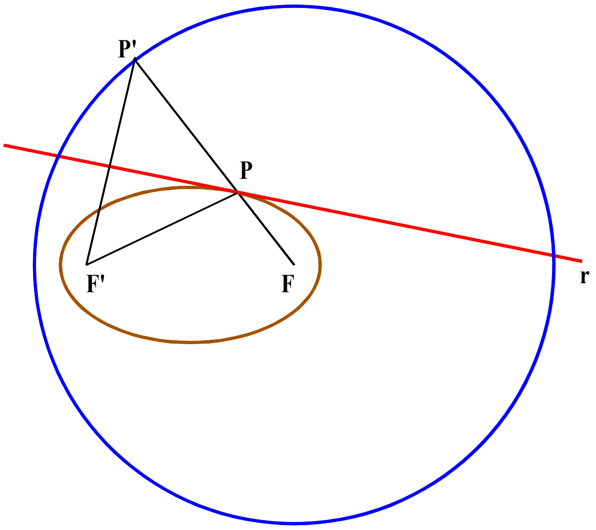
LA HIPÉRBOLA *(propiedad foco-directriz)*

Traza los puntos del plano que distan del punto **F** el doble que de la recta **d**



RECTAS TANGENTES A UNA CÓNICA: LAS ENVOLVENTES

- **Elipse $\mathcal{E}$** — La **circunferencia directriz** es la que tiene por centro uno de los focos y por radio $2a$, el diámetro mayor de la elipse

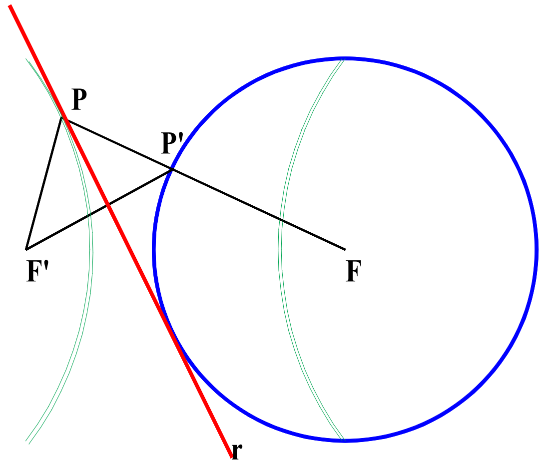


$$\left.\begin{array}{l} FP + FP' = 2a \\ FP + PP' = 2a \end{array}\right\} \Rightarrow F'P = PP'$$

Luego $P \in r$ mediatriz de $P'F'$

Y, además, se puede probar que la recta **r** es tangente a la elipse

- **Hipérbola $\mathcal{H}$** — La **circunferencia directriz** de la hipérbola es la que tiene por centro uno de los focos y por radio $2a$

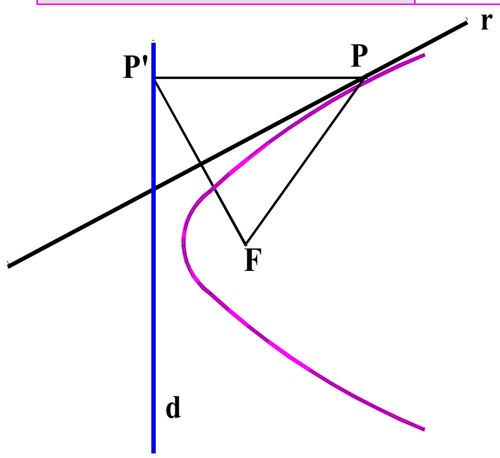


$$\left.\begin{array}{l} FP - F'P = 2a \\ FP - PP' = 2a \end{array}\right\} \Rightarrow F'P = PP'$$

Luego $P \in r$ mediatriz de $P'F'$

Y, además, se puede ver que la recta **r** es tangente a la hipérbola.

- **Parábola $\mathcal{P}$** — Señalemos bien el foco y la **recta directriz** de la parábola

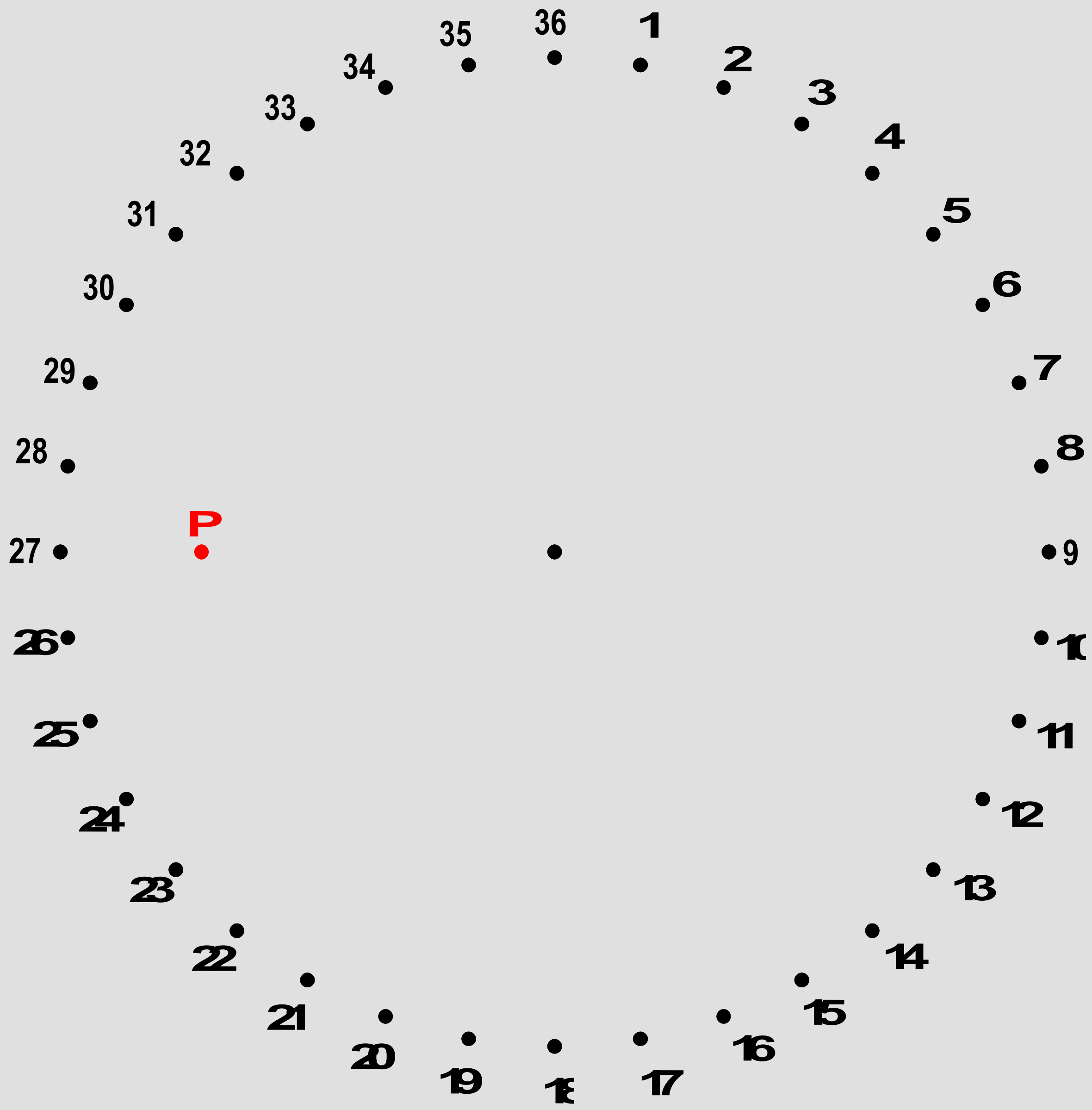


$FP = PP'$

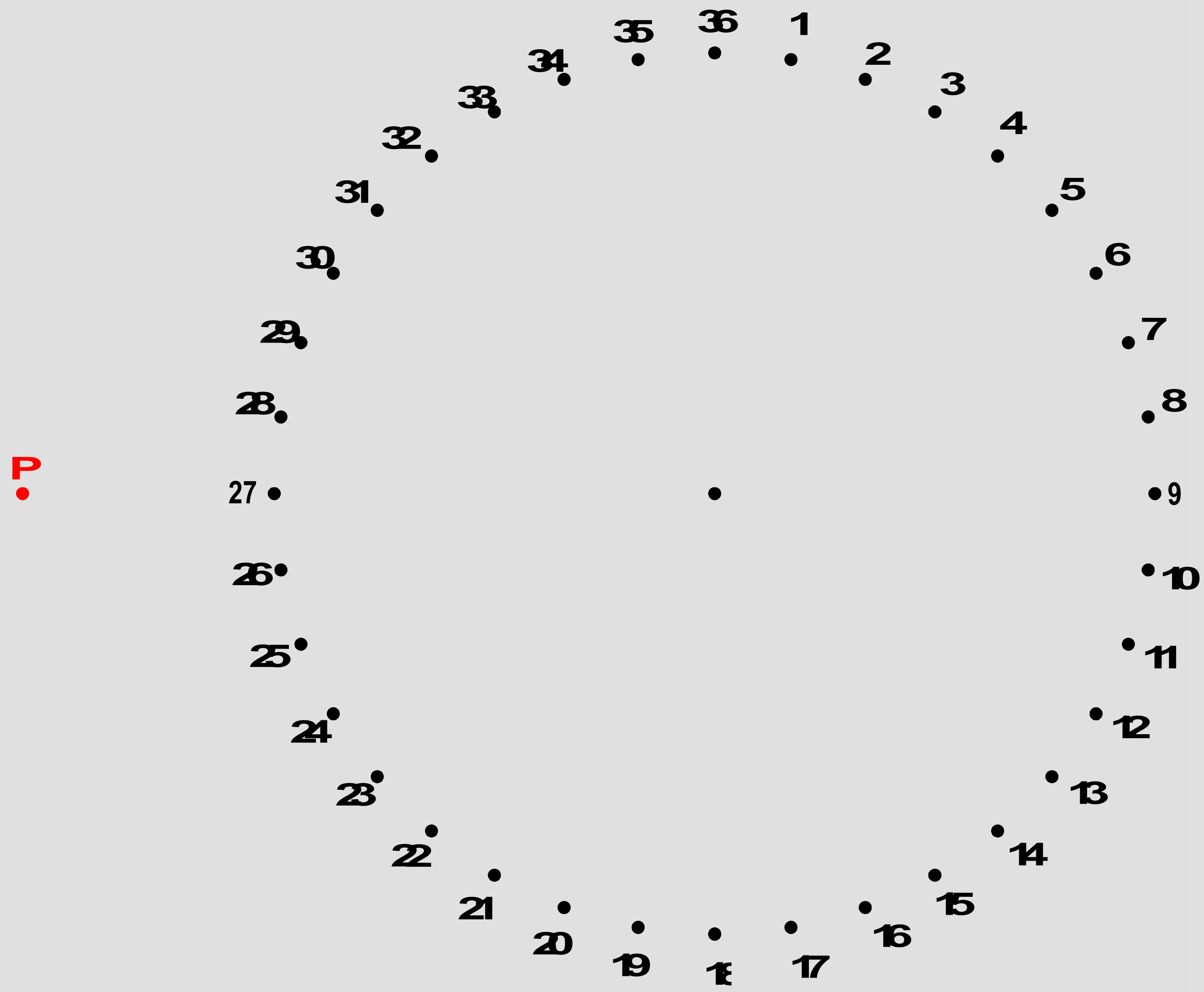
Luego $P \in r$ mediatriz de $P'F$

Y se prueba que la recta **r** es tangente a la parábola

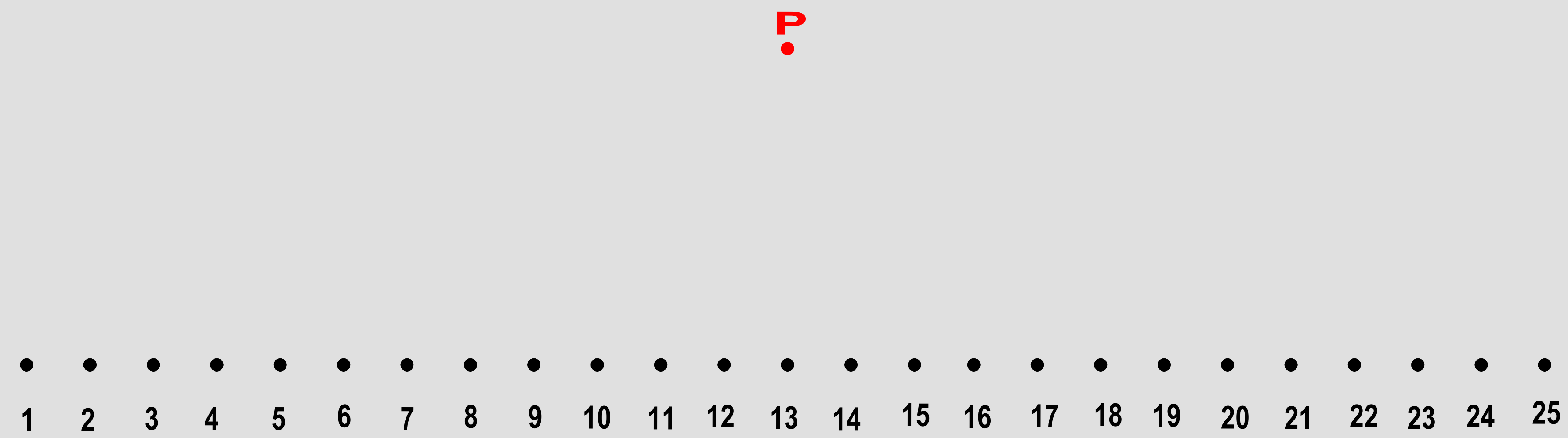
LA ELIPSE *(rectas tangentes por plegado de papel)*



LA HIPÉRBOLA *(rectas tangentes por plegado de papel)*

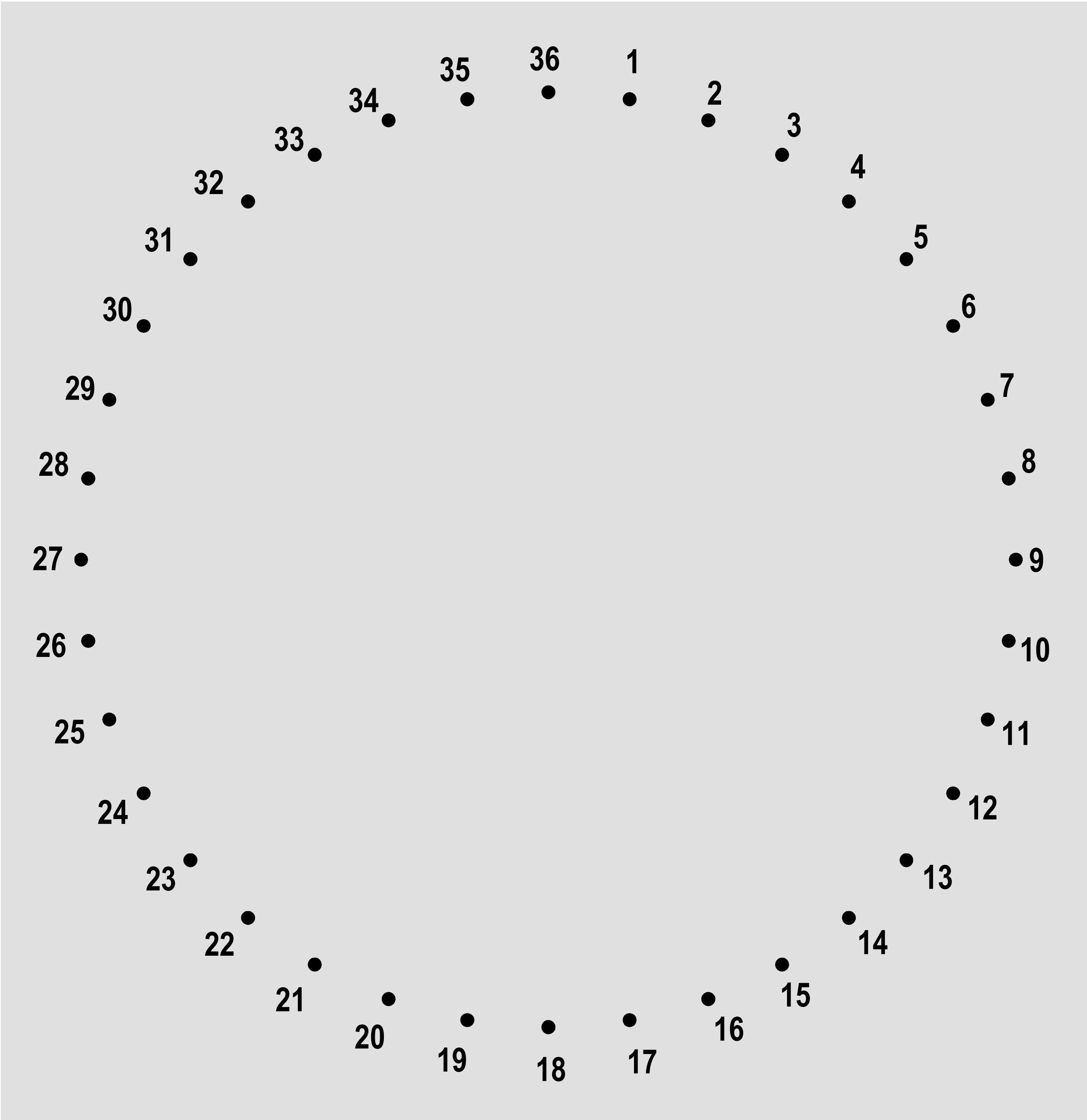


LA PARÁBOLA *(rectas tangentes por plegado de papel)*

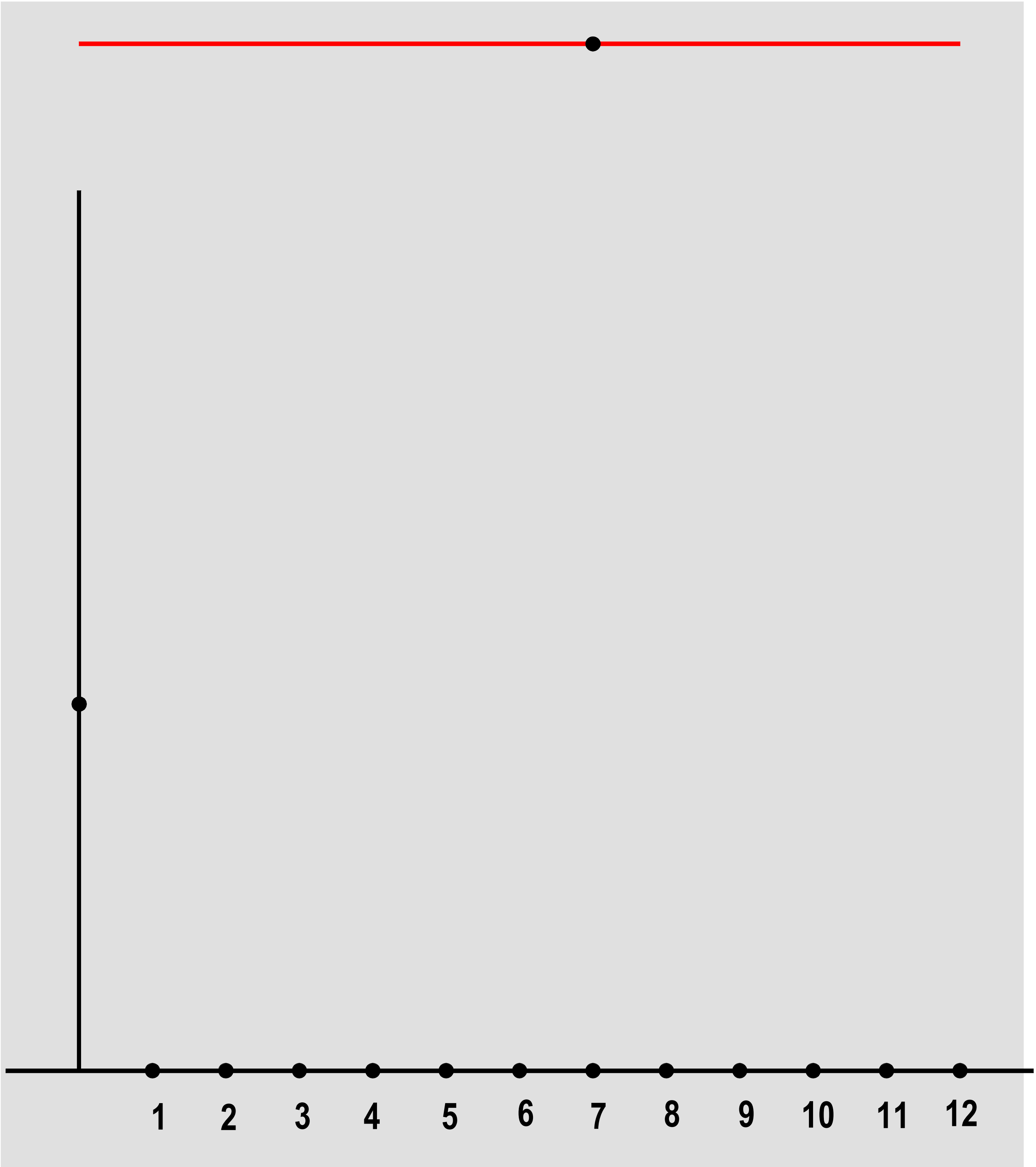


ENVOLVENTES: *BORDADO CIRCULAR*

$n \rightarrow n + 11$

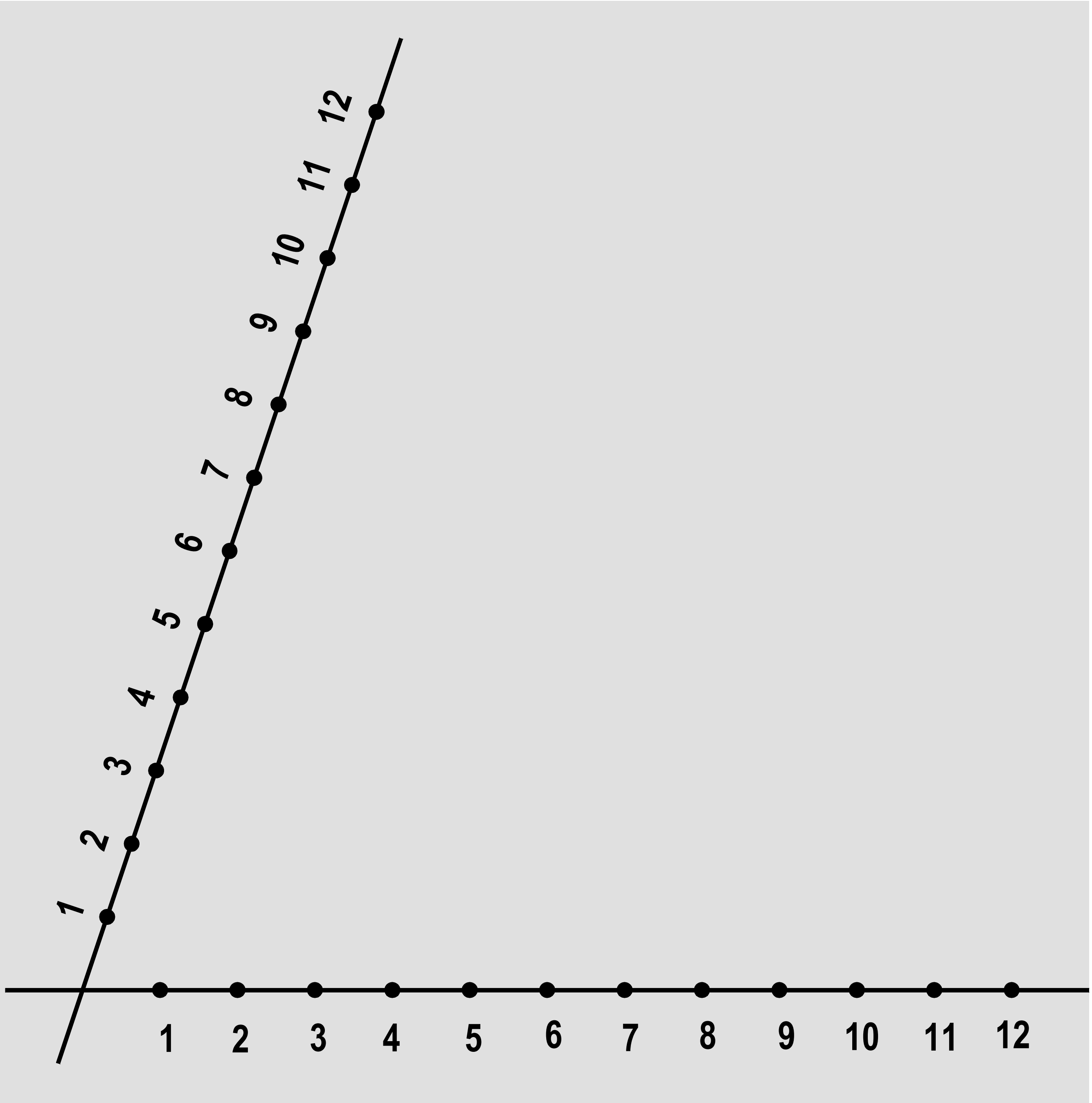


ENVOLVENTES: *BORDADO ELÍPTICO*



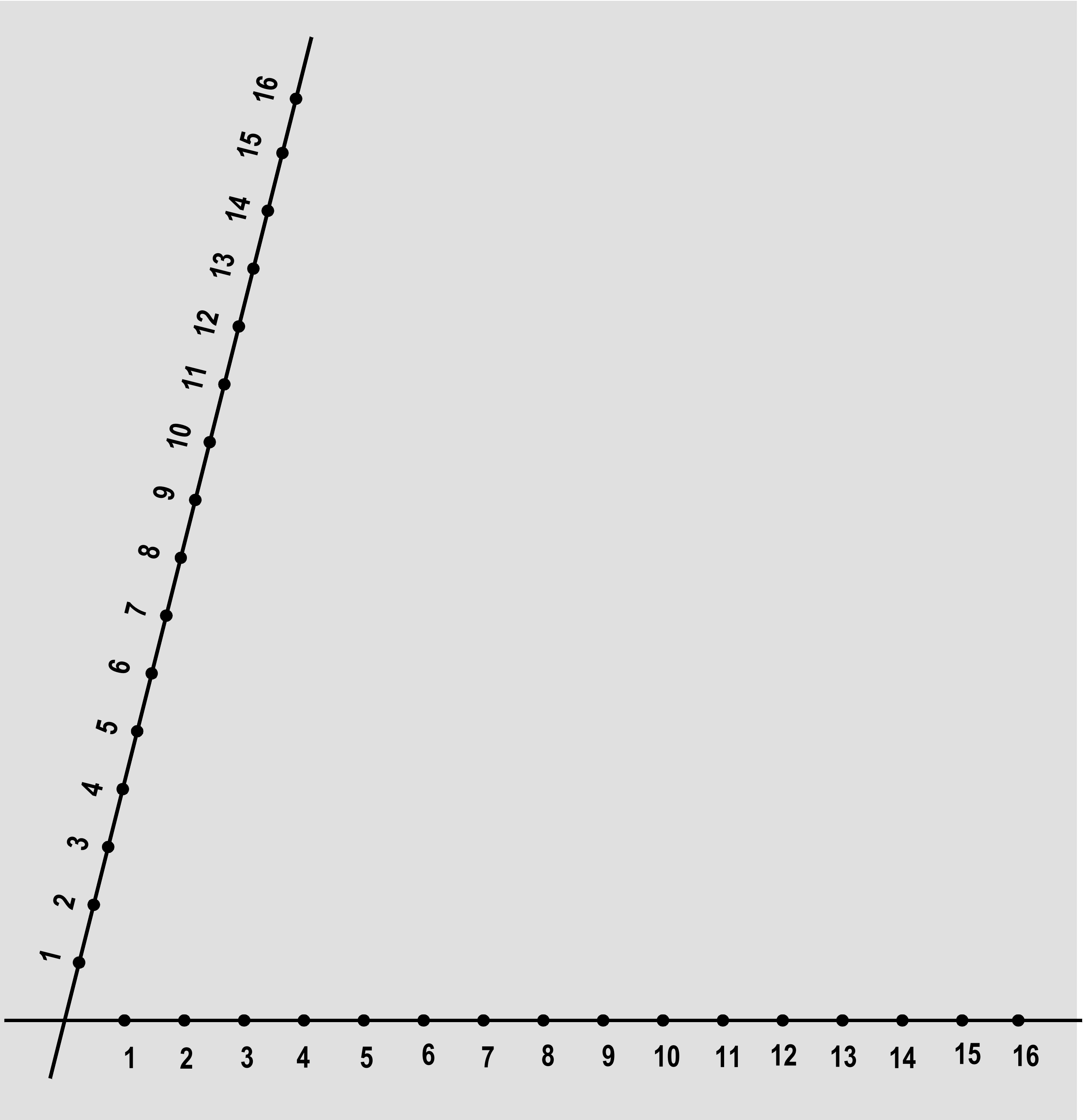
ENVOLVENTES: *BORDADO HIPERBÓLICO*

$$n \rightarrow \frac{12}{n}$$



ENVOLVENTES: *BORDADO PARABÓLICO*

n → 17 – n



LAS CÓNICAS
Presencia en la Naturaleza, el Arte y la Técnica

La presencia del cono y sus secciones en la naturaleza es abundante y variadísima:

• Idealizando superficies cónicas son las colinas, las cimas y picos de montañas, el cráter de un volcán *(conos adventicio y de erupción)*, y el sedimento de materiales que se recogen al final de un torrente, o el montón de arena o gravilla que forma un camión que la descarga; cónicos son el fruto y el perfil de las ramas de los pinos, abetos o cedros *(coníferas)*; y forma de tronco de cono invertido tienen las conchas de algunas especies de moluscos gasterópodos.

• Las piedras que se lanzan a un estanque producen ondas en circunferencias concéntricas; las órbitas de los planetas son elípticas; hiperbólica es la película de jabón que se forma entre dos aros metálicos, y parabólica es la trayectoria del balón que tiramos a canasta o a portería.

• En particular, las formas circulares y esféricas son constantes en la Naturaleza:

- La gravedad y la tensión superficial se equilibran para dar, sobre todo, en seres vivos de pequeño tamaño, una estructura radial e incluso cierto grado de simetría esférica. Así ocurre con las hojas de los geranios, con algunas bayas y frutos *(cerezas, naranjas ...)*; con determinados organismos unicelulares *(algunas bacterias, células de glóbulos rojos y blancos, óvulos ...)*; con ciertos organismos pluricelulares simples *(lapas vulgares, por ejemplo)* o parte de los más complejos *(ojos de los animales y sus partes, cabeza y/o tórax de algunos insectos)*.
- Las articulaciones que facilitan el movimiento en los extremos de diversos huesos *(brazo-clavícula; fémur-tibia ...)*.
- Cuerpos celestes: satélites, planetas, estrellas.
- Arco iris.

En cuanto a sus posibilidades técnicas y artísticas ofrecemos aquí una pequeña muestra, recalcando la utilidad en función de sus propiedades geométricas:

• **Conos.**

- Balizas y señalizadores para regular el tráfico, ubicar estaciones de un circuito o delimitar recorridos en entrenamientos o acontecimientos deportivos.
- Envoltorios, cucuruchos, copas de vidrio, maceteros y otros recipientes.
- Embudos, megáfonos, chimeneas.
- Reductores o amplificadores cónicos para vástagos, brocas, destornilladores y todo tipo de herramientas. Abocadoras de escombros ...
- Pantallas de focos y lámparas.
- Piedras de molinos, rodamientos.
- Capuchones, capirotes, gorros turcos *(fez)*.
- Relojes de arena.
- Diábolos.
- Algunos árboles se podan de forma cónica para favorecer su crecimiento o por cuestiones estéticas: son típicos los setos de cipreses

- **Circunferencias.**

Omnipresentes en nuestras vidas, también se obtienen como secciones de la esfera y el cilindro.

- Botellas, latas, tubos, tapaderas, vasos y gran variedad de útiles de cocina.
- Todo tipo de ruedas, dentadas, poleas, ruecas, bobinas, engranajes.
- Medallas, monedas.
- Pelotas, canicas.
- Transportadores de ángulos.
- Bóvedas, ábsides, balcones, arcos *(de medio punto, de herradura, árabe apuntado, ojival, angrelado, de talón, carpanel, gótico...)*, rosetones, vidrieras, pilas bautismales, altares, ventanales, torres, cúpulas, adornos....
- Escudos de armas, heráldicos, de clubes deportivos.
- Diseño: anagramas, publicidad.

- **Elipses.**

- Recorrido de cualquier peldaño de una escalera que resbala.
- Andenes de estaciones de metro.
- Envases de algunas conservas.
- También se obtienen como secciones cilíndricas: superficie del líquido en un vaso inclinado o loncha de embutido.
- Aunque menos frecuentes que los circulares, también pueden encontrarse ventanales y arcos elípticos.

- **Hipérbolas.**

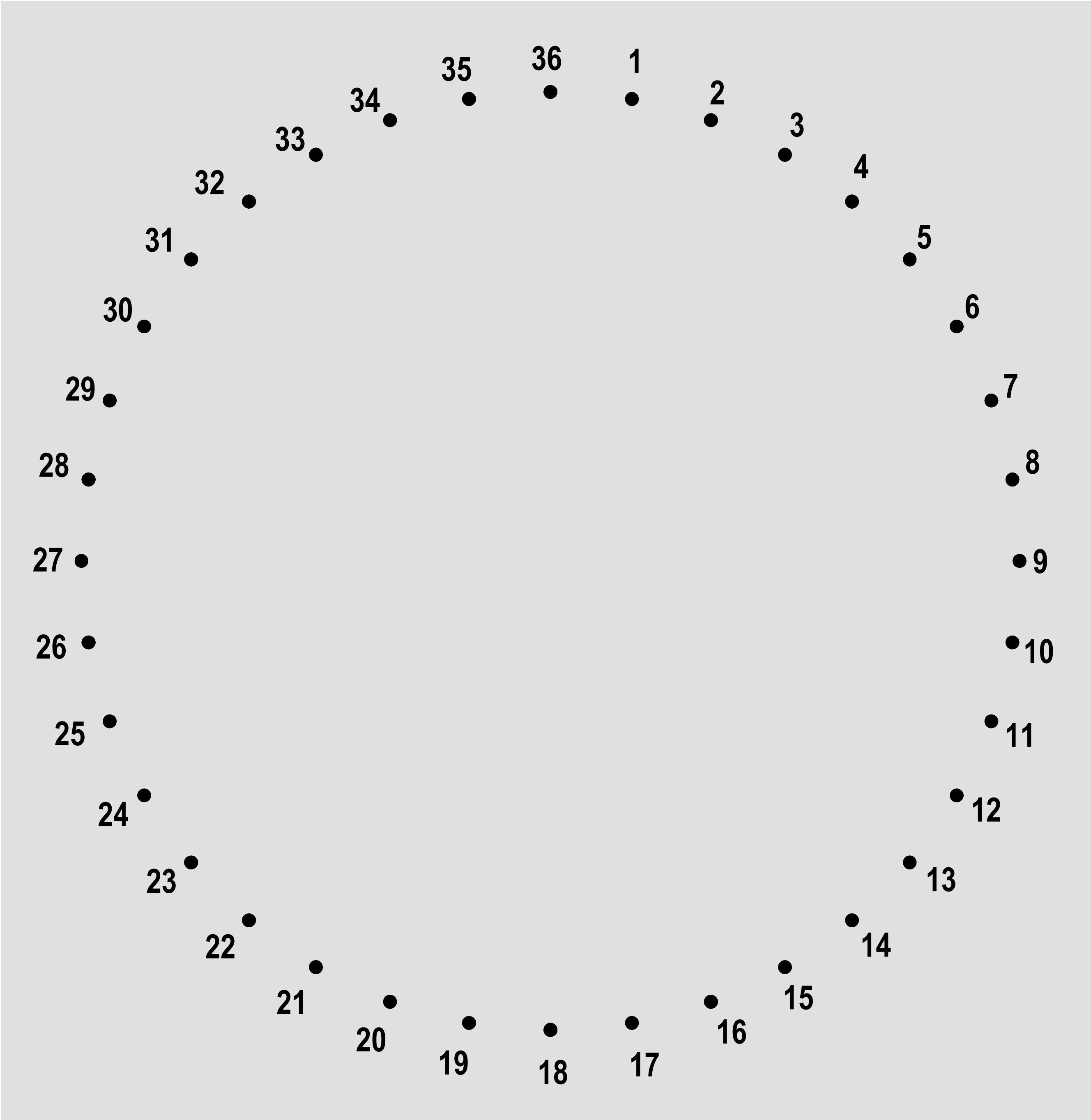
- Todo fenómeno de proporcionalidad inversa se representa gráficamente con una hipérbola.
- Torres de refrigeración de centrales térmicas *(hiperboloides de una hoja)*.
- Cuencos y otros tipos de recipientes *(hiperboloides de dos hojas)*.
- Zona de audibilidad: región de la superficie terrestre en la que, en un momento dado, ya se ha oído o se oye ahora el sonido de un avión supersónico que vuela a una determinada altura.
- Esculturas cinéticas.

- **Parábolas.**

- El lanzamiento de un proyectil describe una trayectoria parabólica y su alcance depende del ángulo de inclinación del cañón. La línea que delimita la zona de tiro es también una parábola: la parábola de seguridad.
- Es el fundamento del radar, de la antena parabólica, de los faros de los coches, de los mecheros y hornos solares.
- La forma que adopta el líquido al girar, por el centro, el vaso que lo contiene.
- El lugar geométrico de los vértices que no están sobre la recta en la que colocamos triángulos equiláteros de lados de1, 3, 5, ..., 2n-1 unidades de longitud tocándose por el vértice.
- Arcos de puentes y puentes colgantes.

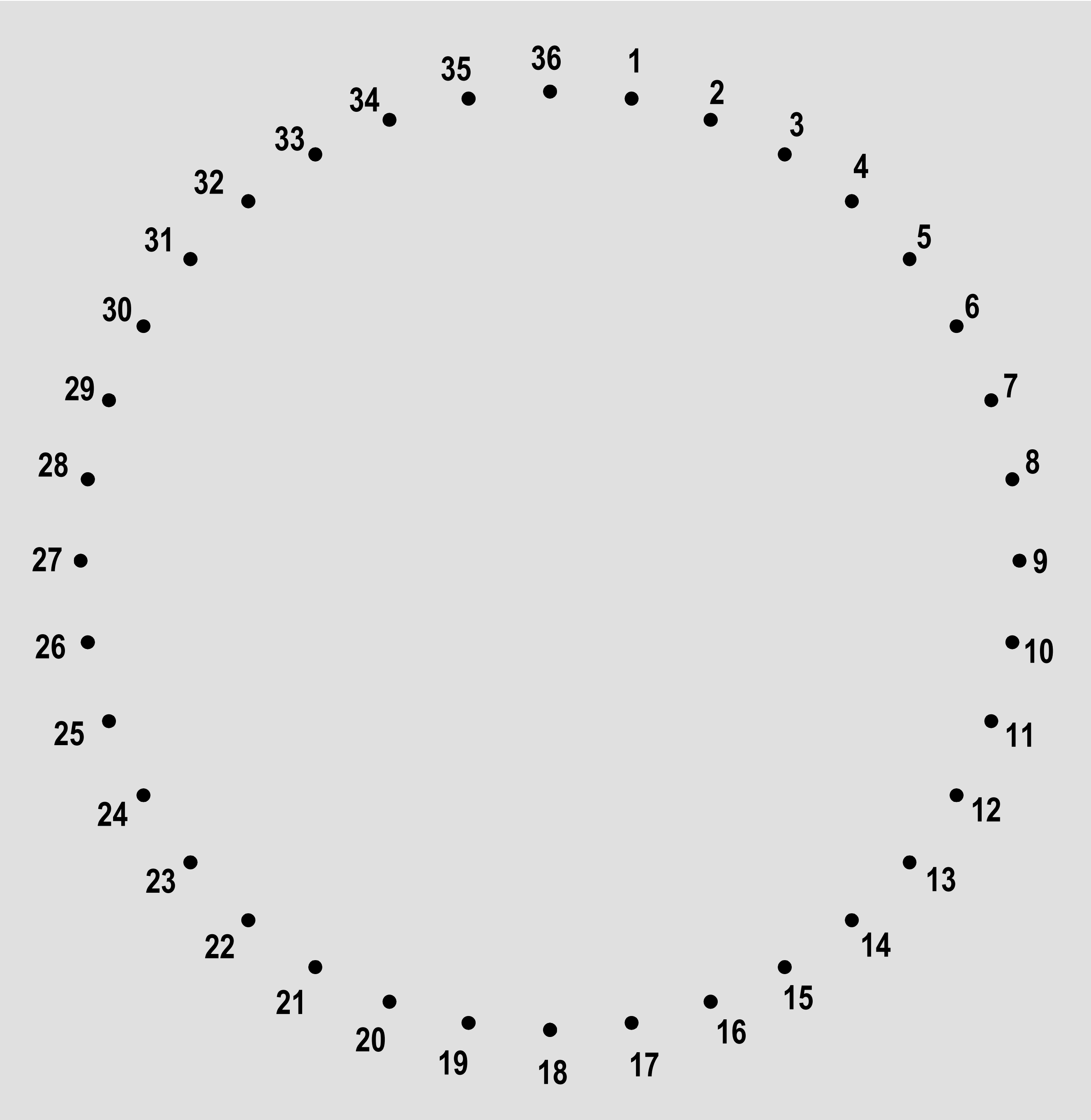
MÁS BORDADOS: LA CARDIOIDE

n → 2n



MÁS BORDADOS: LA NEFROIDE

n → 3n



Y PARA TERMINAR

Toma tu máquina de fotos, o tu móvil si dispone de cámara, y date una vuelta por la ciudad en busca y captura de las curvas que te hemos presentado en este cuadernillo.

Pega aquí las tres que más te gusten y anota qué te llamó la atención.